دو فصلنامهٔ فلسفی شناخت، «ص۲۴۳-۲۵۹»
پژوهشنامهٔ علوم انسانی: شمارهٔ۷۰/۱
بهار و تابستان۱۳۹۳، *Knowledge, No.*70/1.

قضیهٔ اول ناتمامیت گودل و ضدواقع‌گرایی در فیزیک

حسن فتح‌زاده*

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۱۲/۱۰
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۳/۱

چکیده

گودل طی مقالهٔ مفصلی در ۱۹۳۱ برهان پیچیده و نبوغ‌آمیزی بر ناتمامیت ریاضیات مطرح ساخت. در آن قضیه گودل نشان داده بود که در هر سیستم اکسیوماتیک شامل حساب (تحت شرایط خاصی)، گزاره‌هایی تصمیم‌ناپذیر وجود دارند. ایدهٔ به کار رفته در برهان گودل شبیه پارادوکس ریچارد است، و همین باعث شده است که عده‌ای در پذیرش آن تردید کنند. در این مقاله نخست نگاهی اجمالی به برهان گودل می‌اندازیم، تا مشخص شود که این برهان دچار تعارضات ناشی از خودارجاعی نمی‌شود. در ادامه به یکی از تبعات فلسفی آن می‌پردازیم. نشان خواهیم داد که این برهان در کنار استدلال معروف «تعین ناقص»، واقع‌گرایی در فیزیک را با تردیدهایی روبه‌رو می‌سازد.

واژگان کلیدی: گودل، ناتمامیت، تعین ناقص، واقع‌گرایی، ضدواقع‌گرایی.

*استادیار گروه فلسفه دانشکده علوم انسانی دانشگاه زنجان. آدرس الکترونیک:
hfatzade@znu.ac.ir

مقدمه

با توسعهٔ هندسه‌های نااقلیدسی و منطق‌های غیر استاندارد، ریاضیات در دوران معاصر هر چه بیشتر دست از ادعای افلاطونی خود کشیده و اندیشهٔ صورت‌گرایانه، که برای ساختارهای ریاضیاتی هیچ تعینی جز خودسازگاری منطقی قائل نیست، به تدریج فضای بیشتری از اتمسفر جهان ریاضیات را فرا می‌گیرد. صورت‌گرایی به دنبال این است که ریاضیات را به عنوان قلمرویی مستقل و درخود معرفی کند، قلمرویی که ذیل تجربه، شهود، صور پیشین ادراک و یا حتی منطق، به مثابه حقیقتی افلاطونی، قرار نگیرد. در این رویکرد ریاضیات از لحاظ موضوع تهی است و این اپوخه‌ای که بر محتوای آن وارد می‌شود، قرار است صرفاً فرم و قالب را برجسته کند. هیلبرت، از بزرگان صورت‌گرایی، گرچه در قلمرو ریاضیات متناهی اندیشه‌ای کانتی داشت و حاضر بود ریاضیات متناهی را به چارچوب‌های کانتی اندیشه فرو بکاهد، اما وقتی پای ریاضیات نامتناهی همان بهشت کانتور به میان می‌آمد، ریاضیات را کار با نمادهای تهی و بی‌معنایی در نظر می‌گرفت که تنها تعین‌شان سازگاری‌شان است. اندیشهٔ هیلبرت شباهت جالبی به ابزارانگاری دارد، که در آن گزاره‌های متناهی و با معنای ریاضیات متناظر با گزاره‌های مشاهدتی در علوم طبیعی‌اند و بخش‌های نامتناهی که وی «عناصر ایده‌آل»[1] می‌نامیدشان نظیر موجودات تئوریکی که به مثابه افسانه‌هایی مفید و به‌دردبخور در نظر گرفته می‌شوند.[2] این عناصر ایده‌آل هیچ معنایی ندارند و جز کلی‌ترین شرط اندیشه، یعنی سازگاری، هیچ تعین و محدودیتی برای آنها وجود ندارد:

> *«تنها یک شرط، آن هم یک شرط کاملاً ضروری، در رابطه با عناصر ایده‌آل وجود دارد؛*
> ***این شرط اثبات سازگاری‌شان است.***»[3]

بر این مبنا هیلبرت در پی این بود که پیش از هر چیز ریاضیات را فرمول‌بندی کرده، قلمرو آن را از تمام عناصر تجربی و شهودی بپیراید.[4] خوش‌بختانه بخش بزرگی از این ایدهٔ اساسی صورت‌گرایی در سال ۱۹۱۰ توسط راسل و وایتهد، و البته ذیل پروژهٔ منطق‌گرایی، انجام شد. اما این ریاضیات صوری‌شده چندان رضایت‌بخش نمی‌بود اگر

---

1. Ideal elements 2. Brown 2008: 72 3. Hilbert 1983, 199

٤.برای مثال موریس پاش (Moritz Pasch) در ۱۸۸۲ نشان داد که اگر نقاط A، B، C و D روی یک خط راست واقع باشند و B میان A و C، و C میان B و D واقع شده باشد، سیستم هندسهٔ اقلیدسی قادر نیست این حقیقت بدیهی و پیش‌پاافتاده را اثبات کند که B میان A و D واقع شده است.

سازگاری آن به اثبات نمی‌رسید. هیلبرت به دنبال برهانی مطلق برای سازگاری ریاضیات برهانی که سازگاری ریاضیات را موکول به سازگاری یک نظام دیگر نکند بود، و آن‌قدر این مسأله برای او مهم و حیاتی بود که در سخنرانی معروف خودش، که در سال ۱۹۰۰ در دومین کنفرانس بین‌المللی ریاضیات در پاریس آن را در قالب ۲۳ مسألهٔ سرنوشت‌ساز ریاضیات در قرن بیستم معرفی کرد، مسألهٔ دوم را به اثبات سازگاری حساب اختصاص داده بود.[۱] البته مسأله این نیست که بخواهیم یک نظام صوری سازگاری خودش را اثبات کند، چرا که در یک نظام ناسازگار هر گزاره‌ای قابل اثبات است و بنابراین در صورت اثبات سازگاری یک نظام هم‌چنان قادر نیستیم در مورد سازگاری آن داوری کنیم. اما پیش از اینها مسألهٔ مهم‌تری وجود دارد که اغلب به شکل بدیهی فرض گرفته و مورد غفلت واقع می‌شود؛ یعنی مسألهٔ صوری‌سازی کامل ریاضیات. آیا با هر تعداد دل‌خواه اکسیوم قادریم تکلیف تمام گزاره‌های ریاضیات را معین کنیم؟ در ۱۹۳۱ گودل ۲۵ ساله نشان داد که مشکل بزرگی در این‌جا وجود دارد. بنا بر قضیهٔ گودل امکان صوری‌سازی کامل جهان ریاضیات وجود ندارد. این قضیه یکی از نقاط عطف در تاریخ منطق به شمار می‌آید که درک ما از مبانی ریاضیات، انتظارات‌مان از ریاضیات و حتی جایگاه فلسفی ریاضیات در معرفت‌شناسی معاصر را دست‌خوش تغییرات قابل ملاحظه‌ای کرده است. این قضیه برای فلاسفهٔ علم اهمیت زیادی دارد، چرا که نه تنها فلسفه ریاضیات، بلکه حتی فلسفه فیزیک نیز به دلیل درهم‌تنیدگی فیزیک و ریاضیات از آن تأثیر می‌پذیرد. ریاضیات زبان فیزیک است و این امر سرنوشت فلسفی این دو را به نوعی به هم گره می‌زند.

این مقاله از دو بخش تشکیل شده است. نخست تلاش می‌کنیم نگاهی اجمالی، اما دقیق، به قضیه اول ناتمامیت گودل بیافکنیم. چنان که معروف است، قلب استدلال گودل تا حد زیادی شبیه پارادوکس دروغ‌گو (یا دقیق‌تر پارادوکس ریچارد[۲]) است و همین مسأله ممکن است ما را در رابطه با اعتبار قضیهٔ گودل دچار تردیدهایی کند. لازم است یک بار برهان گودل را دقیق دنبال کنیم. خواهیم دید که استدلال گودل دچار تعارضات ناشی از خودارجاعی[۳] نمی‌شود. در ادامه ضمن طرح مباحثی در فلسفه فیزیک، به یکی از نتایج قابل توجه قضیهٔ اول ناتمامیت گودل در این قلمرو خواهیم پرداخت. پیش از هر چیز لازم

1. Grattan and Guinness 2000: 135

۲. برای آشنایی با این پارادوکس و نسبت آن با برهان گودل نگاه کنید به فصل ششم از ناگل و نیومن ١٣٦٤.

3. Self-referentiality

به یادآوری است که باید از اغراق در اهمیت این قضیه و نیز دست کم گرفتن آن پرهیز کرد. نشاندن این قضیه در جایگاه درخور خودش، یکی از اهداف جانبی این مقاله است.

قضیهٔ اول ناتمامیت گودل

در ابتدا یک حساب نسبتاً ضعیف را معرفی می‌کنیم که، با ملاحظاتی، از حذف اصل استقرا از حساب فعلی به دست می‌آید. این حساب را که رابینسون در ۱۹۵۲ معرفی کرد حساب Q می‌نامیم. اصول Q در زبان منطق مرتبهٔ اول بدین قرار است:

1. $\forall x\,(0 \neq Sx)$
2. $\forall x, y\,(Sx = Sy \rightarrow x = y)$
3. $\forall x\,(x \neq 0 \rightarrow \exists y\,(x = Sy))$
4. $\forall x\,(x + 0 = x)$
5. $\forall x, y\,(x + Sy = S(x + y))$
6. $\forall x\,(x \times 0 = 0)$
7. $\forall x, y\,(x \times Sy = (x \times y) + x)$

همان طور که گفتیم، این حساب نسبت به حساب فعلی ضعیف‌تر است، برای مثال قضیهٔ $\forall x\,(0+x=x)$ در آن برقرار نیست. اگر اصل استقرا را، به شکل شماتیک زیر، به این اصول اضافه کنیم، به حساب رایج می‌رسیم که پئانو در ۱۸۸۹ اصول آن را معرفی کرد و به همین خاطر حساب PA نامیده می‌شود. (از آن جا که اصل سوم از اصول دیگر به علاوهٔ اصل استقرا نتیجه می‌شود، آن را حذف می‌کنیم.)

شمای اصل استقرا $(\varphi(0) \wedge \forall x\,(\varphi(x) \rightarrow \varphi(Sx))) \rightarrow \forall x\,\varphi(x)$

دلیل اینکه اصل استقرا را به صورت شماتیک نوشتیم این است که می‌خواهیم از زبان منطق مرتبهٔ اول استفاده کنیم. می‌دانیم که منطق مرتبهٔ دوم تفاوت‌هایی اساسی با منطق مرتبهٔ اول دارد و موضوع صرفاً بر سر یک سورگذاری بر محمولات و توابع نیست. برای مثال در حالی که به سادگی می‌توان اثبات کرد تعداد فرمول‌های منطق مرتبهٔ اول همواره شمارا است، اما در منطق مرتبهٔ دوم، از آنجا که هر محمولی عضوی از مجموعهٔ توانی یک مجموعهٔ بی‌نهایت شمارا است، بنابراین می‌توانیم ناشمارا فرمول داشته باشیم. یعنی شمای اصل استقرا نمایندهٔ تعداد شمارایی اصل است، در حالی که در منطق مرتبهٔ دوم

تعداد مصادیق اصل استقرا می‌تواند ناشمارا باشد.[1]

در آغاز یک مفهوم مهم و اساسی را معرفی می‌کنیم.

تعریف: یک تابع را «بازگشتی اولیه»[2] گوییم اگر بتوانیم آن را به صورت بازگشتی بر حسب توابع اولیه $(S, +, \times)$ و با استفاده از عملگر ترکیب توابع بسازیم. یک نمونه از توابع بازگشتی اولیه چنین است:

$$f(0) = k, \qquad f(Sy) = h(y, f(y))$$

توابع بازگشتی اولیه توابع ساده و خوش‌تعریفی اند که ساختن‌شان و کار کردن با آنها بدون هیچ مشکلی صورت می‌گیرد. در ادامه تابع مشخصهٔ محمول P را این گونه در نظر می‌گیریم:

$$c_P\,(m) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } P(m) \\ 0 & \text{وگرنه} \end{cases}$$

می‌گوییم یک محمول بازگشتی اولیه است اگر تابع مشخصهٔ آن بازگشتی اولیه باشد.

اکنون وقت آن است که به ایدهٔ نبوغ‌آمیز گودل یعنی «حسابی‌سازی نحو»[3] بپردازیم. ایدهٔ گودل این است که به هر فرمول حساب PA یک عدد منحصربه‌فرد، عدد گودل آن فرمول، نسبت دهد و با این اعداد به فرمول‌ها ارجاع دهد. برای این کار ابتدا به نمادهای زبان اعداد زیر را نسبت می‌دهیم:

$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\forall$	$\exists$	$=$	(	)	0	S	$+$	$\times$	x	y	z	...
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	2	4	6	...

۱. در صورتی که اصل استقرا را به زبان منطق مرتبهٔ دوم بنویسیم، قادر خواهیم بود جمع (+) و ضرب (×) را به صورت بازگشتی برحسب تابع تالی (S) تعریف کنیم و در این حالت با حذف چهار اصل مربوط به جمع و ضرب، تنها ۳ اصل (اصول اول و دوم و اصل استقرا) کفایت می‌کند. البته اگر در حساب منطق مرتبهٔ اول هر یک از توابع اولیهٔ جمع و ضرب را حذف کنیم، با حساب‌های ضعیفی روبه‌رو خواهیم بود که نشان داده شده است، بر خلاف حساب کنونی، «تمام» اند. (Presburger 1930 و Skolem 1931) نکتهٔ جالب دیگر این که گودل هنگام کار روی اثبات قضیهٔ اول ناتمامیت خود (1931)، از طریق عدددهی مبتنی بر «قضیهٔ باقیماندهٔ چینی» به دنباله‌های متناهی، نشان داد که توابع اولیهٔ جمع و ضرب تنها توابع اولیه‌ای اند که باید در قالب اصل موضوع تعریف شوند و پس از این که آن‌ها را پذیرفتیم، به کمک شمای اصل استقرا قادر خواهیم بود تمام توابع بازگشتی دیگر (توان، فاکتوریل و..) را به صورت بازگشتی برحسب آن‌ها تعریف کنیم. (نک. Potter 2004, 98–100)

2. Primitive recursive

3. Arithmetization of syntax

یعنی به ادوات منطقی و ثوابت و عملگرهای زبان به ترتیب ذکر شده اعداد فرد ۱ تا ۲۵ و به متغیرها اعداد زوج را نسبت می‌دهیم.

سپس به فرمول Q که اعداد نمادهای آن به ترتیب $c_n,..,c_2,c_1,c_0$ باشد، عدد گودلی به این طریق نسبت می‌دهیم:

$$\vec{\varphi} = 2^{c_0}.3^{c_1}.5^{c_2}...\Pi_n{}^{c_n} \qquad \Pi_n : (n+1)th \ \ prime \ \ number$$

و به رشته فرمول‌های e_0 ، e_1 ، $e_2..en$ با اعداد گودل g_0 ، g_1 ، $g_2..gn$ ابرعدد گودل[1] زیر را نسبت می‌دهیم:

$$2^{g_0}.3^{g_1}.5^{g_2}...\Pi_n{}^{g_n} \qquad \Pi_n : (n+1)th \ \ prime \ \ number$$

برای مثال عدد گودل فرمول $(\forall x, y(Sx = Sy \rightarrow x = y)$ رابر است با:

$$2^9.3^2.5^4.7^{15}.11^{21}.13^2.17^{13}.19^{21}.23^4.29^7.31^2.37^{13}.41^4.43^{17}$$

برای هر عدد گودل یا ابر عدد گودل داده شده نیز می‌توان به سادگی فرمول یا رشته فرمول‌های متناظر با آن را به دست آورد.

تعریف:(Prf (m, n یعنی m ابر عدد گودل رشته فرمول‌هایی است که برهانی برای فرمول با عدد گودل n است.

در این‌جا یک استدلال منطقی را با یک محمول ریاضیاتی کدگذاری کرده و نمایش داده‌ایم. این محمول در ترجمهٔ براهین منطقی به زبان ریاضیات نقشی اساسی بر عهده خواهد داشت. برای این کار نخست براهین منطقی را به روش هیلبرت می‌نویسم. در این شیوه هر برهان منطقی دنباله‌ای است از فرمول‌هایی که به یک نتیجه ختم می‌شوند و هر یک از آنها یا مقدمه اند، یا اصل موضوع، و یا این که از فرمول‌های قبلی با قاعدهٔ استنتاج حاصل شده‌اند. چنان‌که خواهیم گفت(Prf(m, n بازگشتی اولیه است و این یعنی می‌توان مفهوم «اثبات» را نیز حسابی‌سازی کرد.

تعریف: قطری‌شدهٔ فرمول φ را چنین تعریف می‌کنیم: اگر φ متغیر آزاد «y» داشته باشد، به جای متغیر «y»، عدد گودل φ را جای‌گزین می‌کنیم، و در غیر این صورت تغییری در φ نمی‌دهیم.

---

1. Super Gödel number

$$\varphi(y) \xrightarrow{\text{قطـــــری}} \varphi(\overleftrightarrow{\varphi})$$

دقت کنید که در این‌جا با زبان مواجهه‌ای کاملاً صوری داریم، یعنی برای مثال اگر در فرمولی به جای متغیر «y» از متغیر «x» استفاده کنیم، اگر چه هر دو فرمول هم‌ارز باشند، قطری‌شدهٔ آنها متفاوت خواهد بود.

تعریف: تابع diag(n) به هر عدد گودلی، عدد گودل قطری‌شدهٔ فرمول متناظر با آن را نسبت می‌دهد. مثال:

$diag(4) = 4$

$diag(16) = 2^{21}.3^{21}.5^{21}.7^{21}.11^{21}.13^{21}.17^{21}.19^{21}.23^{21}.29^{21}.31^{21}.37^{21}.41^{21}.43^{21}.47^{21}.53^{21}.59^{19}$

در این مثال‌ها4 و16 به ترتیب اعداد گودل فرمول‌های «x» و «y» بوده، و قطری‌شدهٔ این دو فرمول به ترتیب «x» و «16» اند. (توجه داشته باشید که

16=SSSSSSSSSSSSSSSS0)

تعریف:
$$Gdl(m,n) =_{df.} prf(m,\ diag(n))$$

یعنی m ابرعدد گودل رشته‌ای از فرمول‌ها است که برهانی برای قطری‌شدهٔ فرمول متناظر با عدد گودل n به حساب می‌آید.

لم: Prf(m, n) بازگشتی اولیه است.

لم: تابع diag(n) بازگشتی اولیه است.

اثبات این دو لم خیلی طولانی و پرجزئیات، اما سرراست، است. از این دو می‌توان به سادگی به نتیجهٔ باارزش زیر رسید.

نتیجه: Gdl(m, n) بازگشتی اولیه است.

تعریف:
$$U(y) =_{df.} \forall x \neg Gdl(x, y)$$

U(y) می‌گوید هیچ برهانی برای قطری‌شدهٔ فرمول متناظر با عدد گودل y وجود ندارد.

$$G =_{df.} U(\overleftrightarrow{U})$$

فرمول G قطری‌شدهٔ فرمول U است.

$$\Rightarrow G \equiv \forall x \neg Gdl(x, \overleftrightarrow{U})$$

بنابراین G می‌گوید که هیچ برهانی برای قطری‌شدهٔ U وجود ندارد؛ یعنی در واقع G می‌گوید قطری‌شدهٔ U (که همان خود G است) قابل اثبات نیست.

نتیجه: G صادق است ا.ت.ا در PA قابل اثبات نباشد.

دقت کنید که G گزاره‌ای خوش‌تعریف از حساب است که از توابع و محمولات بازگشتی

اولیه تشکیل شده و تنها وقتی که در فراریاضیات نگاشته می‌شود انگار می‌گوید «من قابل اثبات نیستم». G به هیچ وجه خودـارجاع نیست.

تعریف: نظریهٔ T درست[۱] است اگر اکسیوم‌ها صادق و قواعد استنتاج صدق‌نگه‌دار[۲] باشند. بنابراین برای هر φ $T \vdash \varphi$ نتیجه دهد $T \models \varphi$

قضیه: اگر PA درست باشد، آنگاه ناتمام است.

اثبات: فرض کنیم PA یک نظریهٔ درست باشد. اگر بتوان G را در PA اثبات کرد، آنگاه G کاذب است و در نتیجه PA توانسته است یک گزارهٔ کاذب را اثبات کند و این خلاف فرض درستی PA است. بنابراین G قابل اثبات در PA نیست، یعنی G صادق است. پس $\neg G$ کاذب است و بنابر درستی PA، قابل اثبات در PA نیست. یعنی $PA \nvdash G$ و $PA \nvdash \neg G$ (G در PA تصمیم‌ناپذیر[۳] است.)

نتیجه: حالت خاص قضیه اول ناتمامیت گودل (شکل معناشناختی):

اگر اکسیوم‌های PA صادق باشند، آنگاه φ وجود دارد که $PA \nvdash \varphi$ و $PA \nvdash \neg \varphi$

چنان‌که ذکر شد این شکل ضعیفی از قضیه است و گودل این قضیه را در حالتی کلی‌تر و به شکلی نحوی اثبات کرد. در نهایت صورت قوی‌تر این قضیه در سال ۱۹۳۶ توسط بارکلی روسر بدین ترتیب ارائه و اثبات شد:

* *اگر T نظریه‌ای اکسیوماتیک، سازگار و گسترش‌یافتهٔ Q باشد، آنگاه جمله‌ای مانند φ وجود دارد که $T \nvdash \varphi$, و $T \nvdash \neg \varphi$*

• *نتیجه ۱: چنین نظریه‌ای نه تنها ناتمام است، بلکه تمامیت‌ناپذیر نیز است. زیرا φ از اکسیوم‌های T مستقل است و با اضافه کردن آن به اکسیوم‌های T، نظریهٔ گسترش‌یافته هم‌چنان از شرایط این قضیه برخوردار خواهد ماند.*

• *نتیجه ۲: فرض کنیم G_T در T تصمیم‌ناپذیر باشد. G_T را به عنوان اکسیوم به T اضافه می‌کنیم و نظریهٔ گسترش‌یافته را U می‌نامیم. حال بنا بر قضیه اول ناتمامیت گودل می‌توان گزارهٔ جدیدی هم‌چون G_U یافت که در U تصمیم‌ناپذیر است. از آن‌جا که T ضعیف‌تر از U است، پس G_U در T هم تصمیم‌ناپذیر است. با تکرار این کار به مجموعه‌ای نامتناهی از گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر در T دست می‌یابیم.*[۴]

---

1. Sound 2. Truth-preserving 3. Undecidable

۴. برای آشنایی بیش‌تر با جزئیات برهان گودل و ویرایش‌های مختلف قضیه اول ناتمامیت، و نیز

واقع‌گرایی در فیزیک

فیزیک با واقعیت سروکار دارد و همواره نسبت خود را با واقعیت که گاهی پررنگ‌تر و گاهی کم‌رنگ‌تر می‌شود حفظ می‌کند. مسألهٔ واقع‌گرایی در فیزیک مربوط است به معادل‌یابی برای مفاهیم و ترم‌های فیزیک در واقعیت؛ این که نظریات فیزیکی تا چه اندازه واقعیت را عیناً توصیف می‌کنند. برای این که محل دعوای واقع‌گرایی و ضدواقع‌گرایی در فیزیک مشخص شود، از یک مثال معروف شروع می‌کنیم. ادینگتون می‌گوید یک میز را می‌توان از دو منظر دید: میز روزمره و میز علمی. در حالت نخست یک شخص عادی میز را به صورت یک‌پارچه و سخت و نفوذناپذیر، ممتد، نسبتاً ماندگار و رنگی، و متشکل از ماده‌ای جامد و پیوسته می‌داند. اما همین میز از نگاه یک فیزیک‌دان عمدتاً فضایی خالی است؛ به این معنا که فاصلهٔ میان ذرات در مقایسه با شعاع الکترون و هستهٔ هر یک اتم‌های تشکیل‌دهندهٔ میز بسیار زیاد (از مرتبهٔ $۱۰^{۴}$) است، و بنابراین حجم ذرات مادی تشکیل‌دهندهٔ میز نسبت به حجم خود میز بسیار اندک (از مرتبهٔ $۱۰^{-۱۲}$) است. در این فضای خالی، بارهای الکتریکی متعددی پراکنده شده‌اند که با سرعت بسیار زیادی در حرکتند.[۱] میز روزمره میزی است که با شهود ما هم‌خوانی بیشتری دارد و میز علمی میزی است که در فرایند تجربه و پیش‌بینی طبیعت به‌تر جواب می‌دهد. کدام یک از این دو واقعی است؟ آیا میز روزمره تمام واقعیت است و میز فیزیکی صرفاً نوعی نظریه‌پردازی و داستان‌سرایی مفید و به‌دردبخور است، یا این که میز فیزیکی واقعیت پوشانده شده را برملا می‌کند و میز روزمره چیزی جز یک نمود و توهم ساده‌انگارانه نیست؟ آن‌چه مسلم است میز فیزیکی همواره در مقابل مشاهدات روزمرهٔ ما مقاومت می‌کند و قرار نیست بالاخره بتوانیم ذرات باردار یا سیستم‌های پیچیدهٔ ریاضیاتی نهفته در نظریات فیزیکی را با حواس خود مشاهده کنیم. بحث واقع‌گرایی در فیزیک ناظر به همین مشاهده‌ناپذیرها است.

برای جلوگیری از یک برداشت اشتباه از همین ابتدا باید میان دو مفهوم «مشاهده‌ناپذیر» و «اساساً مشاهده‌ناپذیر» تفاوتی قائل شویم. مشاهده‌ناپذیری می‌تواند ناظر به موجوداتی باشد که به صورت اصولی از طریق حواس قابل مشاهده اند، اما به خاطر محدودیت‌های واقعی ما، اکنون امکان مشاهده‌شان وجود ندارد. مثلاً اتفاقی که اکنون در اعماق سیاره‌ای دوردست در حال رخ دادن است، مشاهده‌ناپذیر است. اما هنگامی که می‌گوییم امری اساساً

برخی نتایج ریاضیاتی آن، نگاه کنید به Smith 2007: 124-211.

1. Eddington 1928:ix-x

مشاهده‌ناپذیر است، یعنی نه به خاطر محدودیت‌های واقعی ما، بلکه به خاطر ماهیت خود پدیده اساساً امکان مشاهدهٔ آن وجود ندارد. یک نمونهٔ آن «الکترون» است که چون بنا بر نظریه قطر آن از طول موج نور مرئی کم‌تر است اساساً قابل مشاهدهٔ حسی نیست و تنها می‌توانیم به آشکارسازی آن (مشاهدهٔ آثار آن بر پدیده‌های دیگر) دل خوش کنیم. یا نمونهٔ جالب‌تر «امواج الکترومغناطیس» است که بخش بسیار مهمی از جهان فیزیکی را تشکیل می‌دهند، اما در جهان روزمره و واقعی و قابل مشاهده یافت نمی‌شوند. به عنوان مثال یک فیزیک‌دان رنگ سرخ را امواج الکترومغناطیس با طول موج ۷۰۰ نانومتر در نظر می‌گیرد. اما آن‌چه ما همواره در عمل مشاهده می‌کنیم همین رنگ سرخ هرروزه است و هیچ کس، ازجمله خود فیزیک‌دان، قادر نیست امواج الکترومغناطیس را به جای رنگ سرخ مشاهده کند. این امواج در معادلات ریاضیاتی ظاهر می‌شوند و اجازه می‌دهند نظریات فیزیکی به وسیلهٔ آنها پدیده‌های روزمرهٔ مشاهدتی را به خوبی تبیین و پیش‌بینی کنند. اکنون مسألهٔ فلسفی این است که آیا نظریات فیزیکی واقعیت را، آن گونه که هست، توصیف می‌کنند، یا این که باید به معیارهای پراگماتیستی بسنده کرد؟ واقع‌گرایی علمی می‌گوید:

«اغلب امور اساساً مشاهده‌ناپذیر مربوط به نظریات علمی جاافتادهٔ رایج، مستقل از ذهن وجود دارند.»[1]

گالیله به عنوان پدر علم مدرن، با گفتن این که «طبیعت به زبان ریاضی نوشته شده است» پیشاپیش تعبیری واقع‌گرایانه از فیزیک ارائه داد که بر تمام تاریخ فیزیک پس از خودش سایه افکند. اغلب یک فیزیک‌دان موقع نظریه‌پردازی باور دارد که در حال نزدیک شدن به واقعیت پنهان شده در پس حجاب‌های زندگی روزمره است؛ برای او معادلات ریاضیاتی خط و خال شاهد پرده‌نشینی است که در هر نظریهٔ جدیدی دست‌یافتنی‌تر می‌شود. به‌ویژه این که ریاضیات به عنوان عامل خلاصی از سوبژکتیویسم، ضامن عینیت در فیزیک شمرده می‌شود. رنگ سرخ مشاهده شده امری سوبژکتیو و غیر قابل انتقال به غیر است، و بنابراین نمی‌تواند مبنای یک علم عینی هم‌چون فیزیک قرار گیرد. در حالی که حتی قادر نیستیم از این‌همانی یا دست‌کم تشابه رنگ‌های سرخ ادراک‌شده‌مان سخن بگوییم، معادلهٔ موجی با طول موج ۷۰۰ نانومتر تمام آن‌چه فیزیک نیاز دارد را در اختیارش قرار می‌دهد. پس طبیعی است که امواج الکترومغناطیس را واقعی دانسته، ادراک رنگ سرخ را صرفاً تأثیر این واقعیت در ساختار فیزیولوژیک افراد صرفاً نمود واقعیت در دستگاه شناخت

1. Devitt 2008: 225

سوژه‌ها در نظر بگیریم. بنابراین دغدغهٔ مشاهده‌پذیری مستقیم موجودات و نظریات فیزیکی از همان آغاز فیزیک جدید، جای خود را به قدرت تبیین پدیده‌های مشاهدتی داد. نیوتن در همان زمینی بازی کرد که پیش از آن گالیله حدود و قوانین‌اش را ترسیم و تعیین کرده بود. امروز می‌دانیم که اصول فیزیک نیوتنی به صورت مستقیم هرگز قابل تجربه نیستند. کافی است «قانون ماند» را یک بار دیگر، اما این بار از این منظر، مورد تأمل قرار دهیم. آیا هرگز کسی قادر به مشاهدهٔ این واقعیت بوده است که «اگر برآیند نیروهای وارد بر جسمی صفر باشد، سرعت جسم ثابت می‌ماند»؟ مسلماً خیر. این قانون به جای این که واقعیت را به صورت مستقیم توصیف کند، چارچوبی در اختیار ما می‌گذارد که واقعیات را از طریق آن توصیف کنیم.

دفاع از ضدواقع‌گرایی

تا این‌جا دیدیم که جهان روزمره و جهان فیزیکی برای توصیف واقعیت در رقابت اند، رقابتی که تا کنون به نفع جهان فیزیکی رقم خورده است. اما از درون فلسفه نقدهایی جدی بر ادعای واقع‌نمایی فیزیک وارد شده است.[1] معروف‌ترین استدلالی که در «فلسفه علم» در دفاع از ضدواقع‌گرایی طرح شده است، استدلال مبتنی بر «تعین ناقص»[2] است. بنا بر این استدلال، از آن‌جا که پدیده‌های مشاهده شده هرگز برای تعین بخشیدن به یک نظریه کفایت نمی‌کند و همواره بیش از یک نظریه با شواهد تجربی موجود هم‌خوانی دارد، بنابراین صرف این هم‌خوانی نمی‌تواند نشانهٔ واقع‌نمایی باشد و باید دست از ادعاهای واقع‌گرایانه در باب نظریات فیزیکی برداریم و صرفاً به جنبه‌های کاربردی آنها بسنده کنیم. یک نمونه از تعین ناقص را در تمثیل هوشمندانهٔ پوانکاره می‌توان یافت. دانشمندانی دوبعدی در یک سطح اقلیدسی به شکل دیسک محدود، و به دنبال تعیین هندسهٔ جهان خویش اند. فرض کنید خط‌کش‌ها و وسایل اندازه‌گیری به صورت خطی با تغییرات دما تغییر طول دهند. دما در مرکز دیسک TR^2 (R دیسک و T ثابت) است و در هر نقطهٔ دیسک $T(R^2 - r^2)$ (r فاصله تا مرکز دیسک است). بنابراین توزیع دما به گونه ای است که در مرز پیرامون دیسک دما به صفر میل می‌کند و در نتیجه طول خط‌کش اندازه‌گیری نیز به سمت پیرامون دیسک همواره کاهش می‌یابد. حال اگر ساکنین این دیسک گمان کنند که طول

۱. برای آشنایی با یکی از اصیل‌ترین و دقیق‌ترین این نقدها نگاه کنید به Husserl 1997، به‌ویژه صفحات ۲۱ تا ۵۹.

2 . Underdetermination

خط‌کش‌هاشان همواره ثابت بوده است، به این نتیجه می‌رسند که در یک سطح دوبعدی نامتناهیِ لوباچوفسکی با انحنای ثابت زندگی می‌کنند. حتی اگر آنها از نور برای تعیین هندسه‌شان استفاده کنند، می‌توانیم سطح دیسک را از موادی با ضریب شکست متغیر در نظر بگیریم، به طوری که باز هم این دانشمندان فریب بخورند و به نتیجهٔ قبلی برسند.[۱]

این واقعیت که دو نظریهٔ متفاوت قادر اند مشاهدات ما را به خوبی توضیح دهند، نشان دهندهٔ این است که قدرت تبیین نظریه به تنهایی برای اثبات واقع‌نمایی کفایت نمی‌کند. بار اصلی استدلال در این‌جا بر دوش ایدهٔ «تفاوت» میان این دو نظریهٔ رقیب است، و برای این مهم به یک معیار نیاز داریم. آیا نمی‌توان گفت تفاوت میان این دو نظریه ظاهری و صرفاً زبانی است؟ آیا استفاده از ترم‌های نظری متفاوت، و قرار دادن آنها در معادلات متفاوت، برای قائل شدن به چنین تفاوتی کفایت می‌کند؟ *این که تناظر مستقیمی میان ترم‌های نظری و معادلات فیزیکی با موجودات طبیعی و روابط مشاهدتی حاکم بر آنها وجود ندارد، و همواره این تناظر در دل نظریه و به صورت کل‌گرایانه روی می‌دهد، مستلزم این است که بتوانیم دو نظریه را معادل بدانیم، بدون این که حتی یک یک‌ریختی[۲] میان آنها برقرار باشد.* در این حالت معیار نهایی تعیین معنای یک نظریه پیامدهای تجربی آن خواهد بود. این همان نظریهٔ پراگماتیستی معنا است؛ نظریات معنای‌شان را از پیامدهای عملی‌شان می‌گیرند. اکنون دیگر به سادگی نمی‌توان حکم به تفاوت دو نظریهٔ رقیب داد، شاید این دو در کار توصیف یک چیز واحد اند: «واقعیت».

بنابراین به نظر می‌رسد که هنوز حالتی وجود دارد که بتوانیم هم‌چنان به دفاع واقع‌گرایانه از فیزیک امیدوار باشیم. اگر بتوان نشان داد که دو نظریهٔ رقیب نه تنها در تمام موارد تا کنون مشاهده شده، بلکه در تمام موارد ممکن، نتایج یکسانی به دنبال دارند، آن‌گاه می‌توان ادعا کرد که این دو نظریه در حقیقت یک نظریه اند که به دو زبان یا به دو شکل متفاوت بیان شده‌اند؛ و این در حالتی است که *منطقاً* ممکن باشد سرانجام به «نظریهٔ همه چیز» دست یابیم. بنابراین با فرض پذیرش امکان چنین نظریهٔ فراگیری، نظریات رقیب را می‌توان نظریاتی ناقص دانست که به تدریج به نظریهٔ نهایی که تصویر درست واقعیت خواهد بود، نزدیک می‌شوند. در این معنا می‌توان از مفهوم «نزدیکی به حقیقت»[۳] سخن

1. Poincare 1952, 65-8

۲.یک یک‌ریختی میان ساختارهای (A,r) و (A,'r') تابع یک‌به‌یک و پوشایی است مانند f از: A به A' که: $\forall x, y \in A\ (x\, r\, y \leftrightarrow f(x)\, r'\, f(y))$

3. Verisimilitude

گفت. آن نظریهٔ نهایی مانند حقیقت قصوی، هر چند آرمانی و دست‌نیافتنی باشد، ضامن هم‌گرایی و واقع‌نمایی نظریات فیزیکی خواهد بود.

بیایید از مثال ساده‌ای شروع کنیم. فرض کنید کسی نظریه‌ای راجع به الکتریسیته، درست مانند نظریهٔ فعلی طرح کند، تنها با این تفاوت که همه جا بارهای «مثبت» و «منفی» را با هم عوض کند. در این حالت خواهیم گفت که این دو نظریه رقیب یک‌دیگر نیستند، بلکه در واقع یک نظریه اند که به دو زبان متفاوت بیان شده‌اند.[1] در این‌جا ما از یک‌ریختی میان این دو نظریه استفاده کرده‌ایم. «مثبت» یا «منفی» دانستن بارهای الکتریکی هیچ معنای مستقل و درخودی ندارد، و وجود یک‌ریختی میان این دو نظریه نشان می‌دهد که این دو «امر واحدی» را به «دو طریق متفاوت» بیان می‌کنند. اما در پاسخ به مسألهٔ پوانکاره راه‌حل اندکی پیچیده‌تر است و باید به نظریهٔ پراگماتیستی معنا، در مقابل نظریهٔ افلاطونی، متوسل شد. بنا بر این نظریه، در هر دو حالت توصیف ما از هندسهٔ فضا، با وجود تفاوت ساختاری آنها، در نهایت بیان‌گر یک امر واحد است. دانشمندان دوبعدی که می‌گویند طول خط‌کش‌ها ثابت و سطح لوباچوفسکی نامتناهی است، همان چیزی را می‌گویند که ناظر بیرونی با ادعای تغییر طول خط‌کش‌ها و تناهی سطح اقلیدسی قصد بیان آن را دارد. اگر در این مورد خاص گمان می‌کنیم این دو حالت تفاوت دارند، به خاطر این است که آنها را در یک زمینهٔ وسیع‌تر در نظر می‌گیریم و می‌بینیم که نسبت به آن نتایج متفاوتی به دنبال خواهند داشت. روشن است که ناظر بیرونی تنها در صورتی می‌تواند از تغییر طول خط‌کش‌ها دفاع کند که طول ثابتی را در جهان خود پذیرفته باشد و با مقایسهٔ این جهان دو بعدی با جهان خود چنین ادعایی را مطرح کند. البته پذیرش این طول ثابت دوباره همان مسأله را، اما این بار در جهان سه بعدی ناظر بیرونی، پیش می‌آورد.

بنا بر نظریهٔ پراگماتیستی معنا تفاوت این دو توصیف هم‌چنان با نگاه به نتایج عملی‌شان مشخص می‌شود، و اگر چنین تفاوت عملی‌ای وجود نداشته باشد، آن‌گاه این دو توصیف این‌همان خواهند بود. *به نظر می‌رسد برای دفاع از واقع‌گرایی در فیزیک باید نظریهٔ افلاطونی معنا را به نفع نظریهٔ پراگماتیستی معنا کنار گذاشت.* بنا بر این نظریه معنای هر گزاره به تأثیری که در واقعیت می‌گذارد بستگی دارد؛ به گفتهٔ جیمز در مواجهه با شق‌های مختلف باید از خود پرسید با انتخاب این یا آن شق، «جهان از چه نظر متفاوت خواهد بود؟

1.v . Sklar 1992: 64

اگر نتوانم چیزی پیدا کنم که تفاوت کند، در این صورت وجود شق‌های مختلف معنایی نخواهد داشت.»[۱] معانی در نسبت با پدیده‌ها و تجربیات ما رخ می‌دهند، و ما قادر نیستیم در یک فضای افلاطونی درخودبسته و بی‌ارتباط با واقعیت معانی را به دست آوریم. برای درک معنای یک نظریهٔ فیزیکی، به‌ویژه آن‌گاه که از فهم عرفی عدول می‌کنند (مانند خمیدگی فضا-زمان در نسبیت عام)، باید دید پذیرش این نظریه چه تفاوتی در عمل به دنبال خواهد داشت.

> *«اثراتی با پیامدهای عملی احتمالی را که گمان می‌کنیم موضوع شناخت ما دارا است در نظر بگیرید؛ آن‌گاه شناخت ما از این اثرات، تمام شناخت ما از آن موضوع خواهد بود.»*[۲]

این نتایج مشاهدتی برآمده از نظریه است که معنای آن را تعین می‌بخشد. بنابراین اگر قرار است هر نظریه‌ای با نتایج مشاهدتی‌اش معین شود، آن‌گاه می‌توان دو نظریهٔ رقیبی که به نتایج مشاهدتی یکسان منجر می‌شوند را یک نظریهٔ واحد در نظر گرفت که علت دوگانگی‌شان این است که ادعای واحدی را راجع به جهان به دو زبان متفاوت بیان کرده‌اند. اما چگونه می‌توان ادعا کرد که تمام نتایج مشاهدتی ممکن دو نظریه یکسان اند؟ همان گونه که اشاره شد دفاع واقع‌گرایانه از فیزیک موقوف به فرض امکان آن نظریهٔ نهایی، «نظریهٔ همه چیز»، است، به این معنا که در نهایت تنها یک نظریهٔ فراگیر وجود دارد، و در این حالت نهایی هر دو نظریهٔ به‌ظاهر رقیب، در حقیقت این‌همان اند؛ یک نظریه با دو زبان متفاوت (نظریهٔ همه چیز).

دقیقاً در این‌جا است که قضیهٔ اول ناتمامیت گودل وارد می‌شود و کفهٔ ترازو را به نفع ضدواقع‌گرایی جابه‌جا می‌کند. در واقع این قضیه دست واقع‌گرایان را در پاسخ‌گویی به ضدواقع‌گرایی خالی، و امکان توسل به نظریهٔ پراگماتیستی معنا را در این بزنگاه از آنها سلب می‌کند. یکی از پیامدهای این قضیه این است که امکان تحقق چنان نظریهٔ فراگیری در فیزیک، یعنی آن نظریهٔ نهایی ضامن واقع‌نمایی نظریات فیزیکی، وجود ندارد. چنان که گفته شد سنگ‌بنای فیزیک این ایدهٔ گالیله بود که «طبیعت به زبان ریاضی نوشته شده است». در واقع فیزیک نظریهٔ ریاضیاتی طبیعت است.[۳] در سال‌های اخیر این وجه ریاضیاتیِ فیزیک آشکارتر از همیشه مورد توجه، و حتی گاهی مورد انتقاد فیزیک‌دانان قرار گرفته است.[٤]

---

۱. جیمز ۱۳۷۵: ٤۲

2. Peirce 1878: 293

۳. هیلبرت در سخنرانی معروف خود، مسألهٔ ششم را به یافتن مبنایی اکسیوماتیک برای فیزیک اختصاص داد.

٤. برای مثال نظریه ریسمان (String theory) که امروز یکی از نامزدهای نیل به «نظریهٔ همه چیز» به شمار

اکنون فرض کنید T نظریه‌ای فیزیکی باشد با مفاهیم و اکسیوم‌های فیزیکی، به‌علاوهٔ ریاضیاتی که سیستم حساب پئانو را در بر دارد. در نتیجه بنا بر قضیهٔ اول ناتمامیت گودل گزارهٔ تصمیم‌ناپذیری هم‌چون φ برای آن وجود دارد، بدین معنا که $T\nvdash\varphi$ و $T\nvdash\neg\varphi$ یعنی فیزیک مدرن (فیزیک گالیله‌ای) هرگز قادر نیست نظریهٔ فراگیري برای توصیف طبیعت در اختیار ما نهد، و این ناتوانی در ماهیت آن نهفته است. لازم به یادآوری است که می‌توان آن گزارهٔ تصمیم‌ناپذیر یا نقیض آن را به عنوان قانون (اکسیوم) به نظریه اضافه کرد، اما در این صورت طبق قضیهٔ گودل نظریهٔ جدید نیز کماکان ناتمام خواهد بود. چنان که می‌بینیم استدلال مبتنی بر تعین ناقص، به‌علاوهٔ استدلال بر غیر ممکن بودن ایدهٔ «نظریهٔ همه چیز»، ادعای واقع‌گرایانه نسبت به فیزیک را با چالش بزرگ و عمیقی روبه‌رو می‌سازد.

در پاسخ به مسألهٔ تسری ناتمامیت ریاضیات به قلمرو فیزیک، برخی به تناهی جهان فیزیکی در مقابل عدم تناهی جهان ریاضیات متوسل شده‌اند. هر چقدر ابعاد کیهان‌شناختی بزرگ باشند، اما هم‌چنان باور غالب بر این است که جهان فیزیکی متناهی است، و «نامتناهی» در واقعیت قابل فعلیت و تحقق یافتن نیست. در این جهان متناهی، سیستم فیزیکی مبتنی بر قوانین حاکم بر آن «تمام» خواهد بود. به‌ویژه در فیزیک معاصر که کمیات همه کوانتومی اند و دیگر از پیوستار نمی‌توان سخن گفت، ما به وضوح تنها با کمیات متناهی سروکار داریم. بنابراین گزاره‌های فیزیکی همه ناظر به تعداد متناهی موجودات اند و به‌وضوح این گزاره‌ها در قلمرو فیزیک تصمیم‌پذیر خواهند بود.[1] اگر فرض کنیم φ در نظریهٔ T تصمیم‌ناپذیر است، مسلماً در یک مجموعهٔ متناهی، قابل تحقیق تجربی و بنابراین تصمیم‌پذیر خواهد بود. اما نتیجهٔ دومی که از قضیهٔ گودل گرفتیم، این راه‌حل را منتفی می‌سازد. گرچه گزارهٔ تصمیم‌ناپذیر φ به خاطر تناهی جهان فیزیکی و امکان بررسی تجربی آن در قلمرویی متناهی در عمل تصمیم‌پذیر خواهد بود، اما طبق نتیجهٔ دومی که از قضیهٔ اول ناتمامیت گودل گرفتیم، تعداد گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر نامتناهی است و بنابراین حتی با فرض امکان بررسی هر یک از این گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر در جهان متناهی فیزیکی، هم‌چنان وظیفه‌ای نامتناهی و در نتیجه ناممکن در بررسی آنها بر عهده خواهیم داشت.

می‌آید، به شرطی سازگار است که فضا–زمان ۱۰ یا ۲۶ بُعد داشته باشد. (Hawking 2005: 127) این نظریه از چنان ریاضیات محضی برخوردار است که هنوز تعبیر مشخصی از آن در طبیعت نمی‌توان یافت، و به همین دلیل انتقاداتی را در جامعهٔ فیزیک‌دانان برانگیخته است.

1. Barrow 2011: 265

نتیجه‌گیری

فیزیک به معنایی که امروز می‌شناسیم، پروژه‌ای است در جهت توصیف ریاضیاتی طبیعت. همواره پنداشته می‌شد که ریاضیات هیچ محدودیتی ندارد و اگر محدودیتی بر فیزیک وارد می‌شود، از جانب وسایل اندازه‌گیری یا قوای ذهنی ما است. اما با اثبات قضیه اول ناتمامیت گودل در ۱۹۳۱، این نگاه ایده‌آل به ریاضیات ویران و نقیصه‌ای در ذات ریاضیات به رسمیت شناخته شد. گودل نشان داد که ریاضیات تا ابد ناتمام است و هیچ نظام اکسیوماتیک ریاضیاتی قادر نیست تمام حقایق را پوشش دهد، و همواره گزاره‌های صادقی وجود خواهند داشت که از قلمرو این نظام اکسیوماتیک، از نظم ریاضی، می‌گریزند. چنین محدودیت ذاتی‌ای بلافاصله به فیزیک نیز منتقل می‌شود و ایدهٔ «نظریهٔ همه چیز» را با چالشی جدی روبه‌رو می‌سازد. این مهم تبعات فلسفی قابل توجهی را به دنبال خواهد داشت، که یکی از مهم‌ترین آنها تکمیل استدلال مبتنی بر تعین ناقص، و در نتیجه زیر سوال رفتن جدی واقع‌گرایی در فیزیک است. همان‌گونه که نشان داده شد، اکنون توپ در زمین واقع‌گرایان است. ■

فهرست منابع

جیمز، ویلیام، **پراگماتیسم**، ترجمه عبدالکریم رشیدیان، تهران: شرکت انتشارات علمی و فرهنگی، ۱۳۷۵.

ناگل، نیومن و تارسکی، **برهان گودل و حقیقت و برهان**، ترجمه محمد اردشیر، تهران: انتشارات مولی، ١٣٦٤.

Barrow, J. D. "Gödel and Physics", in ***Kurt Gödel and the Foundations of Mathematics: Horizons of Truth,*** Matthias Baaz et al. (eds.), Caشmbridge: Cambridge University Press, 2011.

Brown, J. R. ***Philosophy of Mathematics,*** London: Routledge, 2008.

Devitt, M. "Realism/Anti-realism", in ***The Routledge Companion to Philosophy of Science***, Psillos, S. and Curd, M. (eds.), London: Routledge, 2008.

Eddington, A. ***The Nature of the Physical World,*** Cambridge: Cambridge University Press, 1928.

Grattan and Guinness ***The Search for Mathematical Roots:*** 1870-1940, Princeton University Press, 2000.

Hawking, S. ***The Theory of Everything***, Phoenix Books2005.

Hilbert, D."On the Infinite", in ***Philosophy of Mathematics,*** Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds.), 2nd edition, Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

Husserl, E. ***The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology***, trans. David Carr, Evanston: Northwestern University Press, 1997.

Peirce, C. S. "How to Make Our Ideas Clear", in ***Popular Science Monthly,*** vol. 12, January 1878, 286-302, 1878.

Poincare, H. ***Science and Hypothesis***, trans. W. J. Green-street, New York: Dover Publications Inc, 1952.

Potter, M. ***Set Theory and its Philosophy,*** Oxford: Oxford University Press, 2004.

Sklar, L. ***Philosophy of Physics***, Oxford: Oxford University Press, 1992.

Smith, P. An Introduction to Gödel's Theorems, Cambridge: Cambridge University Press, 2007